

NOUVELLE MÉTHODE
D'ÉLIMINER LES QUANTITÉS INCONNUES DES EQUATIONS.
PAR M. EULER.

1.

Quand, pour résoudre un probleme, on est obligé d'introduire dans le calcul plusieurs quantités inconnues, la solution conduit aussi a plusieurs équations, d'où il faut ensuite chercher la valeur de chacune de ces quantités inconnues. Cela se pratique par le moyen de l'élimination; on commence par une des quantités inconnues en regardant les autres comme connues; & on en cherche la valeur en y employant une ou plusieurs des équations trouvées, pour en tirer cette valeur exprimée par une formule rationelle, & aussi simple, qu'on pourra. Alors on substitue cette valeur dans les autres équations, & par ce moyen tant le nombre des inconnues que des équations deviendra d'une unité plus petit. De la même maniere on élimine ensuite une autre inconnue, & on continue ces opérations jusqu'à ce qu'il ne reste dans le calcul qu'une seule équation, dont la résolution fournira la solution du probleme.

2. Or, ayant plusieurs équations, dont chacune contient la quantité inconnue qu'on veut éliminer, on voit d'abord, qu'on n'en pourroit prendre qu'une seule pour en chercher la valeur de cette inconnue, qui, étant substituée dans les autres équations, rendroit déjà tant le nombre des inconnues que des équations d'une unité plus petit. Cette voye est aussi fort propre si l'inconnue à éliminer ne contient

M 2 pas

pas plus d'une dimenſion dans l'équation qu'on aura choiſie pour en tirer ſa valeur: mais, ſi l'inconnue y montoit à deux ou pluſieurs dimenſions, on ne ſeroit pas ſouvent en état d'en trouver la valeur: &, ſi on l'étoit, ſa valeur irrationelle qu'on obtiendroit, conduiroit à des calculs extrèmement embaraſſans, qui rendroient la ſolution ſouvent impraticable.

3. Donc, lorsqu'il ne ſe trouve aucune équation, où l'inconnue qu'on veut éliminer, n'ait qu'une ſeule dimenſion, il en faut choiſir deux pour en tirer la valeur. Car il eſt démontré, à combien de dimenſions que puiſſe monter l'inconnue en deux équations, qu'il eſt toujours poſſible d'y abaiſſer ſucceſſivement les dimenſions, & cela juſques à ce qu'on parvienne à une équation qui ne renferme plus du tout cette inconnue. Par la même maniere, en combinant deux autres équations, on en tirera une nouvelle, qui ne contiendra plus cette inconnue; & ainſi on formera autant d'équations dégagées de cette inconnue, qu'il faudra, pour en éliminer par une ſemblable méthode les autres inconnues, juſqu'à ce qu'on parviendra à une ſeule équation, qui fournira la ſolution du probleme propoſé.

4. La méthode d'éliminer ſe réduit donc au cas de deux équations qui contiennent toutes les deux la quantité qu'on ſe propoſe d'éliminer; & tout l'ouvrage revient à ce qu'on en trouve une équation, qui ne contienne plus cette quantité. On voit bien que l'opération pour parvenir à ce but, deviendra d'autant plus difficile que les dimenſions auxquelles monte la quantité qu'on veut éliminer, dans ces deux équations, ſeront plus hautes, à moins qu'une circonſtance toute particuliere ne diminue le travail. Et afin qu'on ne ſoit pas obligé de faire cette opération pour chaque cas propoſé, on trouve dans l'Arithmétique Univerſelle de Mr. Newton des formules propres à ce deſſein, à l'aide desquelles l'élimination ſe peut faire aiſément, quand même la quantité à éliminer monteroit, dans les deux équations, juſqu'à quatre dimenſions. Car Mr. Newton ayant pris deux équations générales, qui ne ſurpaſſent pas ce degré, il rapporte l'équation, qui reſulte après l'éli-

l'élimination, de ſorte qu'on n'a beſoin que d'en faire l'application pour chaque cas propoſé. Avant que d'expliquer ma nouvelle méthode, il ſera à propos de donner une idée de celle dont Mr. Newton paroit s'être ſervi.

5. Je commencerai par deux équations, où la quantité à éliminer qui ſoit z, ne monte qu'à une dimenſion, leſquelles ſoient

$$A + Bz = 0, \quad \& \ a + bz = 0,$$

afin qu'on voye mieux, comment les opérations ſe multiplient en paſſant à de plus hautes équations. Or d'abord, il eſt clair qu'on n'a qu'à multiplier la premiere équation par b, & l'autre par B; car ſoutrayant ce produit de celui-là, on aura

$$Ab - Ba = 0,$$

qui eſt l'équation qui réſulte par l'élimination de la quantité z. On pourroit auſſi multiplier la premiere par a, & l'autre par A, afin qu'après la ſouſtraction de l'une de l'autre les termes conſtans ſe détruiſent; & alors on aura $Baz - Abz = 0$, qui étant diviſée par z, donne comme auparavant $Ba - Ab = 0$, ou $Ab - Ba = 0$.

6. Soient maintenant propoſées les deux équations ſuivantes, où la quantité à éliminer z, monte à deux dimenſions.

$$A + Bz + Czz = 0, \quad \& \ a + bz + czz = 0.$$

Qu'on multiplie la premiere par c, & l'autre par C, & la différence ſera

$$Ac - Ca + (Bc - Cb)z = 0.$$

Enſuite, qu'on multiplie la premiere par a, & l'autre par A, & la différence étant diviſée par z, ſera.

$$Ba - Ab + (Ca - Ac)z = 0.$$

Maintenant, ayant deux équations, où la quantité z, ne monte qu'à une dimenſion, ce cas eſt réduit au précédent; & partant l'élimination ſe fera par la formule trouvée ci deſſus, & donnera:

$$(Ac - Ca)(Ca - Ac) - (Bc - Cb)(Ba - Ab) = 0.$$

ou bien en changeant les ſignes

$$AAcc - 2ACac + CCaa + BBac - ABbc - BCab + ACbb = 0.$$

7. Si les deux équations propoſées ſont cubiques:

$$A + Bz + Czz + Dz^3 = 0, \quad \& \quad a + bz + czz + dz^3 = 0,$$

multipliant la premiere par d, & l'autre par D, leur différence ſera

$$Ad - Da + (Bd - Db)z + (Cd - Dc)zz = 0.$$

Or multipliant la premiere par a, & l'autre par A, la différence étant diviſée par z, donnera

$$Ba - Ab + (Ca - Ac)z + (Da - Ad)zz = 0.$$

Nous voilà donc parvenues à deux équations quarrées, d'où l'on éliminera la quantité z, par le §. précédent. De la même maniere, ſi les deux équations propoſées ſont du quatrieme degré, on les réduira à deux équations cubiques; & en général, de quelque degré que ſoient les deux premieres équations, on les réduira à deux équations d'un degré plus baſſes. Continuant donc cette réduction, on parviendra enfin néceſſairement à une équation, qui ne contiendra plus la quantité z.

8. Pour rendre cette élimination plus aiſée pour les deux équations cubiques.

$$A + Bz + Czz + Dz^3 = 0, \quad \& \quad a + bz + czz + dz^3 = 0,$$

on fera les ſubſtitutions ſuivantes:

$$Ad - Da = A' \qquad aB - bA = a'$$
$$Bd - Db = B' \qquad aC - cA = b'$$
$$Cd - Dc = C' \qquad aD - dA = c'$$

& les équations quarrées ſeront

$$A' + B'z + C'zz = 0, \quad \& \quad a' + b'z + c'zz = 0.$$

Alors

Alors, qu'on poſe de plus:

$$A'c' - C'a' = A'' \qquad a'B' - b'A' = a''$$
$$B'c' - C'b' = B'' \qquad a'C' - c'A' = b''$$

pour avoir ces deux équations ſimples:

$$A''b'' - B''z = 0, \quad \& \quad a'' + b''z = 0,$$

& l'équation cherchée qui ne contiendra plus z, ſera

$$A''b'' - B''a'' = 0.$$

9. Si nous comptons le nombre des lettres A, B, C, D, a, b, c, d, qui ſe trouvent multipliées enſemble en chaque terme, nous voyons, que les expreſſions marquées par A', B', C', a', b', c', en contiennent deux dimenſions: & partant les lettres A'', B'', a'', b'', en contiendront quatre, de ſorte que la derniere équation $A''b'' - B''a'' = 0$, ſera de 8 dimenſionis, ou chaque terme ſera compoſé de 8 lettres. Or, en dévelopant cette équation, on trouve, qu'elle eſt diviſible par $Ad - Da$, de ſorte qu'elle ne ſera que de 6 dimenſions, ſavoir

$$\begin{aligned}(Ad-Da)^3 + (Ac-Ca)^2(Cd-Dc) - 2(Ab-Ba)(Ad-Da)(Cd-Dc)&\\ +(Bd-Db)^2(Ab-Ba) - (Ab-Ba)(Bc-Cb)(Cd-Dc)&=0,\\ -(Ad-Da)(Ac-Ca)(Bd-Db)&\end{aligned}$$

Si les deux équations propoſées ſont du quatrieme degré, cette méthode conduira à une équation de 16. dimenſions, mais qui ſe réduira à 8 dimenſions, étant diviſible par une formule de 8 dimenſions; & ainſi de ſuite.

10. On voit donc que cette méthode conduit ſouvent à des équations trop compliquées, qui renferment des facteurs tout à fait inutiles pour le deſſein qu'on a en vue. Car dans le cas des équations cubiques, il eſt évident que le facteur $Ad - Da$, ne ſatisfait point à la queſtion, puiſque l'élimination ne ſauroit conduire à cette équation $Ad - Da = 0$. Donc, tant que ce facteur eſt contenu dans l'équation finale, on ne la peut regarder comme juſte; puiſqu'une équation de pluſieurs dimenſions ne fournit pas une ſolution juſte d'un

d'un probleme, à moins que toutes ſes racines ne rempliſſent les conditions du probleme. Car, ne ſachant point diſcerner les racines fauſſes des véritables, on riſque de tomber dans une ſolution tout à fait fauſſe. Ainſi, quoique les équations auxquelles on parvient en ſuivant cette méthode, contiennent la ſolution véritable, elles contiennent auſſi ſouvent des ſolutions fauſſes: ce qui eſt un défaut très conſidérable.

11. Cette circonſtance m'a donné occaſion de chercher une autre méthode d'éliminer, qui étant delivrée de ce défaut ſoit en même tems tellement fondée ſur la nature des équations, qu'on puiſſe comprendre plus clairement la raiſon de toutes les opérations qu'on eſt obligé de faire. Or d'abord, l'idée de l'élimination ne paroiſſant pas aſſes préciſe, je commencerai par mieux déveloper cette idée, & par déterminer plus exactement, à quoi ſe réduit la queſtion. Car, dès que nous nous ſerons formé une idée juſte du ſujet auquel aboutit l'élimination, nous verrons d'abord, quelles opérations on ſera obligé d'entreprendre pour arriver à ce but. De plus, on ſe trouvera en état de donner à cette recherche une plus grande étendue, & de l'appliquer à pluſieurs autres queſtions, qui peuvent être utiles dans l'analyſe & dans la Théorie des lignes courbes.

12. Pour rendre le raiſonnement plus intelligible, je ne conſidérerai dabord qu'un cas particulier, où la quantité à éliminer z, monte dans une équation au troiſieme degré, & dans l'autre au ſecond. Soient donc ces deux équations:

$$zz + Pz + Q = 0, \quad \& \quad z^3 + pzz + qz + r = 0,$$

où les lettres P, Q, p, q, r, renferment les autres quantités inconnues. Et on veut ſavoir le rapport, qui ſubſiſtera entre ces autres inconnues, après qu'on aura éliminé la quantité z. Ce rapport ſera contenu dans une équation, à laquelle on parvient en éliminant z; & cette équation contiendra les lettres P, Q, p, q, r, & déterminera par conſéquent leur rélation mutuelle, afin que les deux équations propoſées puiſſent ſubſiſter. Mais, pour que ces deux équations puiſſent

puiſſent ſubſiſter à la fois, il faut qu'il y ait une certaine valeur, qui étant miſe pour z, faſſe évanouir tant cette formule $zz + Pz + Q$, que l'autre $z^3 + pzz + qz + r$: c'eſt à dire, il faut que les deux équations propoſées ayent une racine commune, qui convienne également à l'une & à l'autre.

13. Voilà donc à quoi ſe réduit l'élimination de la quantité z: c'eſt de déterminer un tel rapport entre les coëfficiens ou les quantités P, Q, p, q, r, afin que les deux équations propoſées obtiennent une racine commune. Soit ω la valeur de cette racine commune, & $z - \omega$, ſera un facteur de l'une & de l'autre: de ſorte qu'on pourra mettre

$$zz + Pz + Q = (z - \omega)(z + \mathfrak{A})$$
$$z^3 + pzz + qz + r = (z - \omega)(zz + \mathfrak{a}z + \mathfrak{b})$$

& de là il eſt clair qu'il doit y avoir

$$(zz + Pz + Q)(zz + \mathfrak{a}z + \mathfrak{b}) = (z^3 + pzz + qz + r)(z + \mathfrak{A})$$

Or, en égalant ces deux produits, on aura quatre égalités;

I. $P + \mathfrak{a} = p + \mathfrak{A}$; II. $Q + P\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = q + p\mathfrak{A}$;
III. $P\mathfrak{b} + Q\mathfrak{a} = q\mathfrak{A} + r$; IV. $Q\mathfrak{b} = r\mathfrak{A}$.

d'où l'on déterminera aiſément les trois nouvelles lettres $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{a}$ & $\mathfrak{b}$, & enſuite on obtiendra l'équation cherchée, qui contient la rélation requiſe entre les coëfficiens P, Q, p, q, r, ou qui ſera celle qu'on trouveroit par l'élimination de z.

14. Cette détermination ſe fera ſans aucun obſtacle, puisqu'on n'aura à réſoudre que des équations ſimples. Car la premiere égalité donne $\mathfrak{A} = P - p + \mathfrak{a}$, & la ſeconde $\mathfrak{b} = q + p\mathfrak{A} - Q - P\mathfrak{a}$; ou bien $\mathfrak{b} = q + Pp - pp + p\mathfrak{a} - Q - P\mathfrak{a}$; & ces valeurs étant ſubſtituées dans la troiſieme égalité, donnent

$$Pq + PPp - Ppp - PQ + P(p - P)\mathfrak{a} + Q\mathfrak{a} = Pq - pq + q\mathfrak{a} + r,$$

ou

ou bien

$$Pp(P-p)+pq-PQ-r=P(P-p)\mathfrak{a}-(Q-q)\mathfrak{a},$$

d'où l'on tire

$$\mathfrak{a}=\frac{Pp(P-p)+pq-PQ-r}{P(P-p)-(Q-q)}=p-\frac{Q(P-p)-r}{P(P-p)-(Q-q)}.$$

Or les mêmes valeurs donnent pour la quatrieme égalité

$$Qq+PQp-Qpp-QQ+Q(p-P)\mathfrak{a}=r(P-p)+r\mathfrak{a},$$

ou $$\mathfrak{a}=\frac{Qr(P-p)-Q(Q-q)-r(P-p)}{Q(P-p)+r}=p-\frac{Q(Q-q)-Pr}{Q(P-p)+r}.$$

Donc, égalant ces deux valeurs, on aura:

$$\frac{Q(P-p)+r}{P(P-p)-(Q-q)}=\frac{Q(Q-q)+Pr}{Q(P-p)+r},$$ ou bien

$$Q(P-p)(Pq-Qp)+2Qr(P-p)+Pr(Q-q)$$
$$-PPr(P-p)+Q(Q-q)^2+rr=0.$$

15. Maintenant il eſt évident, comment il s'y faut prendre pour éliminer l'inconnue z, de deux équations propoſées d'un degré quelconque. Car, ſoient en général les équations propoſées:

$$z^m+Pz^{m-1}+Qz^{m-2}+Rz^{m-3}+Sz^{m-4}+\&c.=0,$$
$$z^n+pz^{n-1}+qz^{n-2}+rz^{n-3}+sz^{n-4}+\&c.=0,$$

d'où il faut fournir une équation qui ne contienne plus la quantité z. Cette queſtion revient donc à celle-ci, qu'on détermine le rapport entre les coëfficiens P, Q, R, &c. p, q, r, &c. afin que les deux équations propoſées obtiennent une racine commune, ou bien un facteur commun. Soit $z-\omega$, ce facteur commun, & on poſera

$$z^m+Pz^{m-1}+Qz^{m-2}+\&c.=(z-\omega)(z^{m-1}+\mathfrak{A}z^{m-2}+\mathfrak{B}z^{m-3}+\&c.)$$
$$z^n+pz^{n-1}+qz^{n-2}+\&c.=(z-\omega)(z^{n-1}+\mathfrak{a}z^{n-2}+\mathfrak{b}z^{n-3}+\&c.).$$

16. On

16. On aura donc à rendre égaux entr'eux les deux produits ſuivans:

$$(z^m + Pz^{m-1} + Qz^{m-2} + \&c.)\,(z^{n-1} + \mathfrak{a}z^{n-2} + \mathfrak{b}z^{n-3} + \&c.),\ \&$$
$$(z^n + pz^{n-1} + qz^{n-2} + \&c.)\,(z^{m-1} + \mathfrak{A}z^{m-2} + \mathfrak{B}z^{m-3} + \&c.)$$

& puiſque les premiers termes deviennent déjà égaux, le nombre des égalités qu'on en tirera, ſera $= m + n - 1$. Or le nombre des lettres $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, &c. étant $= m - 1$, & des lettres $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, &c. $= n - 1$, le nombre de toutes ces lettres enſemble, dont il faudra chercher les valeurs, ſera $= m + n - 2$; & pour cet effet autant d'équations ſeront ſuffiſantes. Ayant donc une équation de plus, on parviendra enfin à une équation, qui ne contiendra plus aucune de ces lettres $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, &c. & $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, &c. & comme z, ne s'y trouvera pas non plus, ce ſera l'équation cherchée, à laquelle l'élimination conduit; ou qui contient la rélation requiſe entre les coëfficiens P, Q, R, &c. p, q, r, &c. afin que les deux équations propoſées obtiennent une racine commune.

17. Ayant donc mis dans tout ſon jour la nature de l'élimination, & des opérations qu'on dont exécuter pour cet effet, il ſera aiſé de s'en ſervir en chaque cas propoſé. Pour en donner un exemple, je rapporterai un probleme propoſé dans les Actes de Leipzig, au mois d'Octobre 1749, qui porte qu'une équation quarré-quarrée $x^4 = pxx + qx + r$, étant propoſée, où le ſecond terme manque, on en trouve une autre $x^4 = fx^3 + gxx + hx + r$, pourvue du ſecond terme, & où le dernier terme ſoit le même que dans la propoſée, & qui ait avec l'autre une racine commune. Ou bien, il faut trouver l'équation qui reſulte en éliminant de ces deux équations la quantité x: car cette équation contiendra le rapport que doivent avoir les coëfficiens f, g, h, à l'égard des quantités données p, q, r, afin que ces deux équations obtiennent une racine commune.

18. Pour

18. Pour résoudre donc ce probleme, on n'a qu'à résoudre cette équation:

$$(x^4 - pxx - qx - r)(x^3 + Axx + Bx + C) = (x^4 - fx^3 - gx^2 - hx - r)(x^3 + Dxx + Ex + F)$$

d'où l'on tire les égalités suivantes:

$$A = D - f;$$
$$B - p = E - Df - g;$$
$$C - Ap - q = F - Ef - Dg - h;$$
$$- Bp - Aq - r = - Ff - Eg - Dh - r;$$
$$- Cp - Bq - Ar = - Fg - Eh - Dr;$$
$$- Cq - Br = - Fh - Er;$$
$$- Cr = - Fr.$$

Les deux premieres avec la derniere donnent d'abord

$$A = D - f; \quad B = E - Df - g + p; \quad \& \ C = F,$$

lesquelles valeurs étant substituées dans les autres produiront:

$$Dp - fp + q - Ef - Dg - h = 0;$$
$$Ep - Dfp - gp + pp + Dq - fq - Ff - Fg - Dh = 0;$$
$$Fp + Eq - Dfq - gq + pq - fr - Fg - Eh = 0;$$
$$Fq - Dfr - gr + pr - Fh = 0.$$

19. La premiere & la derniere de ces égalités fournissent

$$E = \frac{D(p-g)}{f} - p + \frac{(q-h)}{f}, \ \& \ F = \frac{Dfr - r(p-g)}{q-h},$$

& de là les deux autres égalités prendront les formes suivantes;

$$Df^3r + Dffp(q-h) - Df(q-h)^2 - D(p-g)^2(q-h) = (p-g)(q-h)^2 - ff(q-h) + ffr(p-g),$$

$$D(p-g)(q-h)^2 - Dffq(q-h) + Dffr(p-g) = ffr(q-h) + fr(p-g)^2 - fhp(q-h) + fgq(q-h) - (q-h)^3$$

d'où

d'où nous tirons enfin cette équation:

$$\begin{array}{llll} f^4rr - f^3r(gq + 2hp - 3pq) & - 2ffr(q-h)^2 & - 4fr(p-g)^2(q-h) \\ \quad - f^3qq(q-h) & + ffpr(p-g)^2 & + f(pq - 2hp - 3gq)(q-h)^2 \\ & - ffp(hp-gq)(q-h) & \end{array}$$

$$= r(p-g)^4 - (hp-gq)(p-g)^2(q-h) - (q-h)^4.$$

20. On aura donc une équation du quatrieme degré à résoudre, soit qu'on veuïlle déterminer f, ou g, ou h, pour que l'équation $x^4 = fx^3 + gxx + hx + r$, ait une racine commune avec l'équation proposée $x^4 = pxx + gx + r$. Mais, si l'on vouloit déterminer le terme absolu r commun à ces deux équations, en regardant les autres coëfficiens f, g, h, p, q, comme connus, cela se pourroit faire par la résolution d'une équation quarrée. On pourra même supposer d'abord $f = 0$, & déterminer l'un ou l'autre des coëfficiens, g & h, en sorte que ces deux équations

$$x^4 = gxx + hx + r, \quad \& \quad x^4 = pxx + qx + r,$$

obtiennent une racine commune; ce qui arrivera en satisfaisant à cette équation.

$$r(p-g)^4 = (hp-gq)(p-g)^2(q-h) + (q-h)^4,$$

d'où l'on voit que cela se peut faire, sans que soit $g = p$ & $h = q$.

21. Mais la méthode que je viens d'expliquer; s'étend beaucoup plus loin qu'au seul ouvrage de l'élimination: & on peut à son aide résoudre quantité de problemes, qui pourront être fort importants, tant dans l'Analyse que dans la Théorie des lignes courbes. C'est aussi de ce côté que je crois que cette méthode mérite quelque attention: car, si elle étoit bornée uniquement aux opérations d'éliminer, je conviens que la préférence qu'elle mériteroit sur les autres méthodes trouvées pour ce dessein, ne seroit pas fort considérable: si ce n'étoit qu'elle nous découvre mieux la nature de l'élimination. Voici donc un autre probleme, pour la résolution duquel cette méthode pourra être employée.

Deux équations algébriques indéterminées étant proposées, trouver les déterminations nécessaires pour que ces équations obtiennent deux racines communes.

22. Soit l'une de ces deux équations du troisieme, & l'autre du quatrieme degré.

$z^3 + Pzz + Qz + R = o$, & $z^4 + pz^3 + qzz + rz + s = o$,

où l'on demande quel rapport doit subsister entre les coëfficiens, afin que ces deux équations ayant deux racines, ou deux facteurs simples communs. Soient $z + \alpha$, & $z + \beta$, ces deux facteurs communs, & les deux équations, doivent avoir les formes suivantes:

$$z^3 + Pzz + Qz + R = (z + \alpha)(z + \beta)(z + A)$$
$$z^4 + pz^3 + qzz + rz + s = (z + \alpha)(z + \beta)(zz + az + b),$$

d'où l'on tirera d'abord celle-ci:

$$(z^3 + Pzz + Qz + R)(zz + az + b) =$$
$$(z^4 + pz^3 + qzz + rz + s)(z + A).$$

où il faut que chaques puissances de z soient égalées entr'elles.

23. De là on tirera les cinq égalités suivantes

$$P + a = p + A$$
$$Q + aP + b = q + Ap \qquad aR + bQ = s + Ar$$
$$R + aQ + bP = r + Aq \qquad bR = As.$$

La premiere & la derniere donnent

$$a = p + A - P, \quad \& \ b = \frac{As}{R},$$

& ces valeurs étant substituées dans les trois autres:

$$A(PR - pR + s) = PR(P - p) - R(Q - q)$$
$$A(QR - qR + Ps) = QR(P - p) - R(R - r)$$
$$A(RR - Rr + Qs) = RR(P - p) + Rs.$$

D'où

D'où l'on tire, en éliminant A, ces deux équations :

$$0 = ss + 2Rs(P-p) - PQs(P-p) + Qs(Q-q) + R(P-p)(Pr-Rp) + R(Q-q)(R-r)$$

$$0 = Pss + Rs(Q-q) + PRs(P-p) + R(P-p)(Qr-Rq) + Qs(R-r) - QQs(P-p) + R(R-r)^2$$

qui renferment les déterminations requiſes.

24. Si les deux équations propoſées ſont d'un ordre quelconque, comme

$$z^m + Pz^{m-1} + Qz^{m-2} + Rz^{m-3} + \&c. = 0,$$

$$z^n + pz^{n-1} + qz^{n-2} + rz^{n-3} + \&c. = 0,$$

& qu'on veuïlle déterminer le rapport entre leurs coëfficiens, afin que ces deux équations ayent deux racines communes, on trouvera par un ſemblable raiſonnement, qu'il faut tellement ſatisfaire à cette équation

$$(z^m + Pz^{m-1} + Qz^{m-2} + \&c.)(z^{n-2} + az^{n-3} + bz^{n-4} + \&c.) =$$
$$(z^n + pz^{n-1} + qz^{n-2} + \&c.)(z^{m-2} + Az^{m-3} + Bz^{m-4} + \&c.)$$

que les coëfficiens de chaque puiſſance de z, deviennent égaux de part & d'autre.

25. Or, en rendant ces termes égaux, on obtiendra $m + n - 2$ égalités. Mais le nombre des coëfficiens inconnus A, B, C, &c. étant $= m - 2$, & des autres a, b, c, &c. $= n - 2$, pour déterminer tous ces coëfficiens, on n'aura beſoin que de $m + n - 4$ égalités. Donc, après avoir déterminé tous ces coëfficiens inconnus, on trouvera encore deux équations entre les coëfficiens P, Q, R, &c. & p, q, r, &c. qui renfermeront les conditions requiſes, afin que les deux équations propoſées ayent deux racines communes. Cette détermination ſervira dans la Théorie des lignes courbes à trouver les cas où deux courbes ſe coupent tellement en deux points, que ces deux interſections répondent à la même abſciſſe, indiquée par z.

26. Après ce que je viens de dire, il ne ſera pas difficile de trouver les conditions ſous lesquelles deux équations d'un ordre quelconque acquierent trois racines communes. Car, ſi les deux équations propoſées ſont

$$z^m + Pz^{m-1} + Qz^{m-2} + Rz^{m-3} + \&c. = 0,$$
$$z^n + pz^{n-1} + qz^{n-2} + rz^{n-3} + \&c. = 0,$$

on n'aura qu'à former cette équation:

$$(z^m + Pz^{m-1} + Qz^{m-2} + \&c.)(z^{n-3} + az^{n-4} + bz^{n-5} + \&c.) =$$
$$(z^n + pz^{n-1} + qz^{n-2} + \&c.)(z^{m-3} + Az^{m-4} + Bz^{m-5} + \&c.)$$

& rendre égaux les coëfficiens de chaque puiſſance de z. Cette opération, après avoir déterminé les coëfficiens A, B, C, &c. a, b, c, &c. conduira à trois équations entre les coëfficiens propoſés, qui renfermeront les conditions requiſes, pour que ces deux équations obtiennent trois racines communes.

27. De là il eſt aſſés clair, comment on pourra trouver les déterminations néceſſaires, pour que deux équations propoſées obtiennent quatre ou pluſieurs racines communes; & ces conditions ſeront toujours compriſes en autant d'équations, qu'il y a de racines qui doivent être communes aux équations propoſées. Comme la méthode que je viens d'indiquer pour cet effet, eſt tout à fait ſemblable à celle qui ſert à l'élimination, qui eſt le cas, où deux équations doivent avoir une racine commune, j'ai cru qu'elle méritoit quelque attention; & cela d'autant plus que les méthodes ordinaires, dont on fait uſage dans l'ouvrage de l'élimination, ne ſont pas ſuffiſantes à réſoudre les autres problemes que je viens de rapporter.

